4A

УДК 519.66

Л.П. Андреев
Научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт «Искра» (НИПКИ «Искра»), г. Луганск, Украина
official@iskra.lugansk.ua

Магическая матрица – структура двумерного числового пространства с уникальными свойствами

В статье рассматривается двумерное числовое пространство в виде магической матрицы с неординарными свойствами и подробно описан метод ее построения. Рассматриваются понятия материнской магической матрицы и дочерних магических матриц. Подробно описан метод приложения магических матриц при преобразовании координатной системы и при переходе от одной точки к другой в *n*-мерном векторном пространстве. Описаны методы сжатия информации и определены законы распределений чисел в магических матрицах. Статья рассчитана на научных работников, интересующихся проблемами линейной алгебры, матричного исчисления и теории чисел.

Введение

Сжатие информации без потери информации ((lossless) представляет собой очень сложную задачу – проблему, практически не разрешимую современными математическими методами. В Научно-исследовательском и проектно-конструкторском институте «Искра» (НИПКИ «Искра») в 2000 году в плане информационных технологий была поставлена задача на разработку новых математических методов, позволяющих снять или хотя бы уменьшить проблему сжатия информации без потерь.

Известно много методов и приемов по сжатию информации таких, например, как: уплотнение (сжатие) данных – data compression, сжатие кода или свертывание кода – code compression, уплотнение (сжатие) при упаковке цифр или разрядов – digit compression, уплотнение (сжатие) – message compression и др. Но все эти методы и приемы сжимают информацию с некоторыми незначительными потерями, не существенными для дальнейшего использования. Если 32-разрядный двоичный код сжать на 3,125 %, то есть на один бит, то открываются огромные перспективы по сжатию информации без потерь, то есть появляется возможность сжать программу или блок данных, или текст в компьютере до одного или нескольких машинных слов. Но двоичный код без потерь не сжимается! А значит, и информация, представленная в виде двоичных кодов, также не сжимается без потерь. Если в качестве носителя информации взять время, имеется в виду время преобразования информации, то проблему сжатия без потерь можно снять.

Предлагаемая вниманию читателя статья посвящена одному из новых направлений в математике – **магической алгебре**. Появление **магической алгебры** явилось следствием проведенных научно-исследовательских работ по поиску новых математических методов, которые позволили бы сжимать числовую информацию без потерь (lossless), причем информация должна быть представлена в виде после-

довательности любых целых положительных чисел натурального ряда. Основными математическими объектами, над которыми проводятся вычислительные операции в магической алгебре, являются магические матрицы, магические векторы и магическое пространство. Поэтому алгебра получила название «магическая алгебра».

Словосочетания «магическая матрица», «магический вектор», «магическое пространство» следует понимать как волшебные, непривычные, не поддающиеся известным правилам, описания. В предлагаемой статье подробно описан метод построения магической матрицы, основные свойства и возможные ее приложения. Основное назначение магической матрицы – это преобразование магических координат при переходе от одного вектора к другому в магическом пространстве. Такие понятия, как: магические векторы и их линейные преобразования, система магических координат и магическое пространство, будут рассмотрены в следующих статьях.

Цель данной работы – представить метод построения магической матрицы и ее возможные приложения.

Магическая матрица – это система элементов (чисел) $\boldsymbol{a_{ij}}$, расположенных в виде таблицы из $\boldsymbol{m}$ строк и $\boldsymbol{n}$ столбцов, причем $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$.

Числовая квадратная таблица называется *магической матрицей*, если суммы элементов отдельно взятых диагоналей равны между собой, т.е. суммы элементов главной диагонали, вспомогательной и диагоналей, параллельных им, одинаковы.

Название «магическая» взято по аналогии с магическими квадратами [1].

1 Метод построения магической матрицы

В качестве числового материала для построения магической матрицы будем использовать числа натурального ряда от 0 до 255.

Преобразуем все числа натурального ряда в заданном диапазоне в 8-битовые двоичные коды (байты) и разложим их на четные и нечетные биты. Из четных и нечетных бит сформируем два соответствующих 4-битовых кода (тетрады) и снова преобразуем их в десятичные числа, например в виде, представленном на рис. 1.

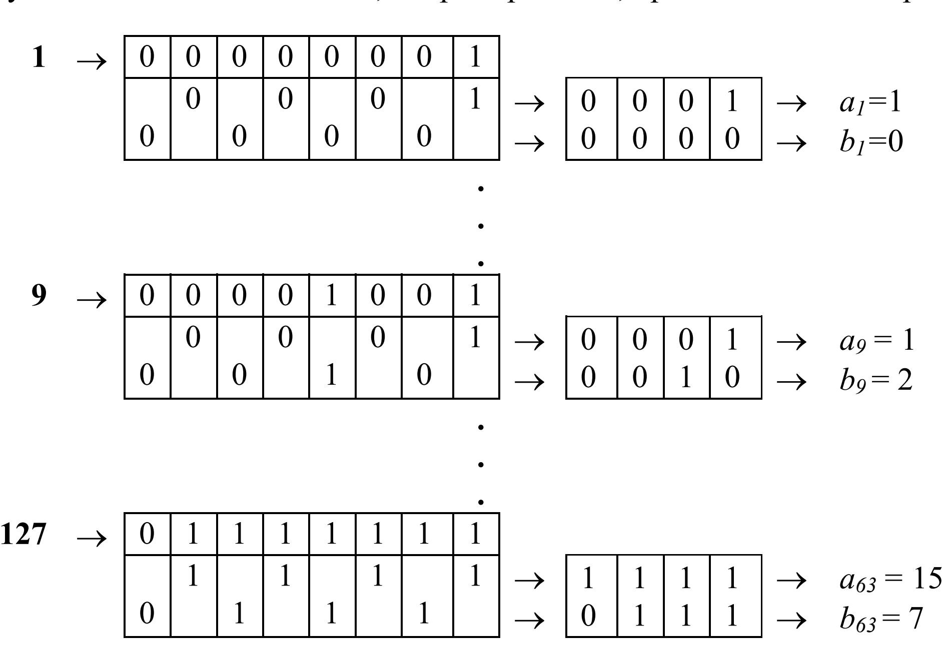


Рисунок 1 – Преобразование чисел натурального ряда в тетрады a_n и b_n

Обозначим число – тетраду, сформированную из четных бит, через a_n, а число – тетраду, сформированную из нечетных бит, через b_n. Здесь индекс n указывает на номер числа из натурального ряда в диапазоне 0÷255. Проводя вышеописанные преобразования, сформируем табл. 1, в которой жирным шрифтом изображены числа натурального ряда, а нежирным шрифтом изображены числа a_n и b_n, причем верхнее число – a_n, а нижнее число под ним – b_n.

При анализе табл. 1 просматривается некоторая закономерность чисел натурального ряда для одинаковых (равных) a_n, то есть просматриваются группы чисел, имеющих равные a_n и нарастающие на единицу b_n.

Так, при $a_n = 0$ получим нулевую группу чисел натурального ряда – 0, 2, 8, 10, 32, 34, …, 170, при этом b_n будут соответственно равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, …, 15.

При $a_n = 1$ получим первую группу чисел натурального ряда – 1, 3, 9, 11, 33, 35, …, 171, при этом b_n будут соответственно равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, …, 15 и т.д.

Сгруппировав таким образом 16 групп для $a_n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, …, 15$ и расположив каждую группу в соответствующую строку (нулевая группа – нулевая строка, первая группа – первая строка и т.д.), построим табл. 2, в которой жирным шрифтом изображены числа натурального ряда, а нежирным шрифтом изображены числа a_n и b_n, причем верхнее число – a_n, а нижнее число под ним – b_n.

Таблица 1 – Таблица чисел натурального ряда с тетрадами a_n и b_n

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
0	1	0	1	2	3	2	3	0	1	0	1	2	3	2	3
0	0	1	1	0	0	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3
16	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**
4	5	4	5	6	7	6	7	4	5	4	5	6	7	6	7
0	0	1	1	0	0	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3
32	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**
0	1	0	1	2	3	2	3	0	1	0	1	2	3	2	3
4	4	5	5	4	4	5	5	6	6	7	7	6	6	7	7
48	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**
4	5	4	5	6	7	6	7	4	5	4	5	6	7	6	7
4	4	5	5	4	4	5	5	6	6	7	7	6	6	7	7
64	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**	**71**	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**
8	9	8	9	10	11	10	11	8	9	8	9	10	11	10	11
0	0	1	1	0	0	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3
80	**81**	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**	**91**	**92**	**93**	**94**	**95**
12	13	12	13	14	15	14	15	12	13	12	13	14	15	14	15
0	0	1	1	0	0	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3

. . .

224	**225**	**226**	**227**	**228**	**229**	**230**	**231**	**232**	**233**	**234**	**235**	**236**	**237**	**238**	**239**
8	9	8	9	10	11	10	11	8	9	8	9	10	11	10	11
12	12	13	13	12	12	13	13	14	14	15	15	14	14	15	15
240	**241**	**242**	**243**	**244**	**245**	**246**	**247**	**248**	**249**	**250**	**251**	**252**	**253**	**254**	**255**
12	13	12	13	14	15	14	15	12	13	12	13	14	15	14	15
12	12	13	13	12	12	13	13	14	14	15	15	14	14	15	15

Таблица 2 – Таблица чисел натурального ряда, объединенных в группы с равными тетрадами a_n и нарастающими на единицу b_n

0	**2**	**8**	**10**	**32**	**34**	**40**	**42**	**128**	**130**	**136**	**138**	**160**	**162**	**168**	**170**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	**3**	**9**	**11**	**33**	**35**	**41**	**43**	**129**	**131**	**137**	**139**	**161**	**163**	**169**	**171**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	**6**	**12**	**14**	**36**	**38**	**44**	**46**	**132**	**134**	**140**	**142**	**164**	**166**	**172**	**174**
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	**7**	**13**	**15**	**37**	**39**	**45**	**47**	**133**	**135**	**141**	**143**	**165**	**167**	**173**	**175**
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	**18**	**24**	**26**	**48**	**50**	**56**	**58**	**144**	**146**	**152**	**154**	**176**	**178**	**184**	**186**
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
17	**19**	**25**	**27**	**49**	**51**	**57**	**59**	**145**	**147**	**153**	**155**	**177**	**179**	**185**	**187**
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

. . .

84	**86**	**92**	**94**	**116**	**118**	**124**	**126**	**212**	**214**	**220**	**222**	**244**	**246**	**252**	**254**
14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
85	**87**	**93**	**95**	**117**	**119**	**125**	**127**	**213**	**215**	**221**	**223**	**245**	**247**	**253**	**255**
15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Если в табл. 2 убрать числа a_n и b_n и оставить только числа натурального ряда, то будет сформирована табл. 3, в результате анализа которой можно сделать вывод, что эта таблица представляет собой магическую матрицу 16-го порядка, так как она полностью отвечает всем условиям магичности (табл. 3).

2 Основные свойства магической матрицы

Ясно, что основным и главным свойством магической матрицы является то, что сумма элементов отдельно взятых диагоналей одинакова, то есть суммы, получаемые от сложения чисел каждой диагонали (основной, вспомогательной и параллельных им диагоналей), одинаковы.

Магическую матрицу 16-го порядка ($n \times n$ = 16×16) будем называть материнской магической матрицей. Обозначать магические матрицы можно любой большой буквой английского или греческого алфавитов, но с верхним значком над буквой, который означает сумму элементов одной (любой) диагонали магической матрицы. Рассмотрим некоторые свойства магической матрицы.

Одним из удивительных свойств магической матрицы является то, что любая матрица порядка $m<n$ является также магической матрицей, независимо от места ее расположения в числовом пространстве **материнской** магической матрицы. Такие матрицы мы будем называть **дочерними** магическими матрицами. Для примера рассмотрим магичность и случайно выбранные любые размещения *дочерних* матриц 2-го, 3-го и 4-го порядков в поле **материнской** магической матрицы.

Таблица 3 – Магическая материнская матрица 16-го порядка

$$\overset{2040}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 10 & 32 & 34 & 40 & 42 & 128 & 130 & 133 & 138 & 160 & 162 & 168 & 170 \\ 1 & 3 & 9 & 11 & 33 & 35 & 41 & 43 & 129 & 131 & 137 & 139 & 161 & 163 & 169 & 171 \\ 4 & 6 & 12 & 14 & 36 & 38 & 44 & 46 & 132 & 134 & 140 & 142 & 164 & 166 & 172 & 174 \\ 5 & 7 & 13 & 15 & 37 & 39 & 45 & 47 & 133 & 135 & 141 & 143 & 165 & 167 & 173 & 175 \\ 16 & 18 & 24 & 26 & 48 & 50 & 56 & 58 & 144 & 146 & 152 & 154 & 176 & 178 & 184 & 186 \\ 17 & 19 & 25 & 27 & 49 & 51 & 57 & 59 & 145 & 147 & 153 & 155 & 177 & 179 & 185 & 187 \\ 20 & 22 & 28 & 30 & 52 & 54 & 60 & 62 & 148 & 150 & 156 & 158 & 180 & 182 & 188 & 190 \\ 21 & 23 & 29 & 31 & 53 & 55 & 61 & 63 & 149 & 151 & 157 & 159 & 181 & 183 & 189 & 191 \\ 64 & 66 & 72 & 74 & 96 & 98 & 104 & 106 & 192 & 194 & 200 & 202 & 224 & 226 & 232 & 234 \\ 65 & 67 & 73 & 75 & 97 & 99 & 105 & 107 & 193 & 195 & 201 & 203 & 225 & 227 & 233 & 235 \\ 68 & 70 & 76 & 78 & 100 & 102 & 108 & 110 & 196 & 198 & 204 & 206 & 228 & 230 & 236 & 238 \\ 69 & 71 & 77 & 79 & 101 & 103 & 109 & 111 & 197 & 199 & 205 & 207 & 229 & 231 & 237 & 239 \\ 80 & 82 & 88 & 90 & 112 & 114 & 120 & 122 & 208 & 210 & 216 & 218 & 240 & 242 & 248 & 250 \\ 81 & 83 & 89 & 91 & 113 & 115 & 121 & 123 & 209 & 211 & 217 & 219 & 241 & 243 & 249 & 251 \\ 84 & 86 & 92 & 94 & 116 & 118 & 124 & 126 & 212 & 214 & 220 & 222 & 244 & 246 & 252 & 254 \\ 85 & 87 & 93 & 95 & 117 & 119 & 125 & 127 & 213 & 215 & 221 & 223 & 245 & 247 & 253 & 255 \end{pmatrix}$$

Магическая матрица 2-го порядка:

$\overset{\Sigma}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & . \\ . & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} . & 2 \\ 1 & . \end{pmatrix}$; магичность $\rightarrow a_{11} + a_{22} = a_{12} + a_{21}$.

Случайно выбранные размещения дочерних матриц в числовом пространстве материнской магической матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 38 & 44 \\ 39 & 45 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 45 & 47 \\ 56 & 58 \end{pmatrix}; \text{ и т.д.}$$

Магическая матрица 3-го порядка:

$$\overset{\Sigma}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \\ 4 & 6 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & . & . \\ . & 3 & . \\ . & . & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} . & . & 8 \\ . & 3 & . \\ 4 & . & . \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} . & 2 & . \\ . & . & 9 \\ 4 & . & . \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} . & . & 8 \\ 1 & . & . \\ . & 6 & . \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} . & 2 & . \\ 1 & . & . \\ . & . & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & . & . \\ . & . & 9 \\ . & 6 & . \end{pmatrix};$$

магичность $\rightarrow a_{11}+a_{22}+a_{33}=a_{13}+a_{22}+a_{31}=a_{12}+a_{23}+a_{31}=$

$=a_{13}+a_{21}+a_{32}=a_{12}+a_{21}+a_{33}= a_{11}+a_{23}+a_{32}.$

Случайно выбранные размещения дочерних матриц в числовом пространстве материнской магической матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \\ 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 9 & 11 \\ 6 & 12 & 14 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 9 & 11 & 33 \\ 12 & 14 & 36 \\ 13 & 15 & 37 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 57 & 59 & 145 \\ 60 & 62 & 148 \\ 61 & 63 & 149 \end{pmatrix}; \text{ и т.д.}$$

Магическая матрица 4-го порядка:

$$\overset{\Sigma}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 10 \\ 1 & 3 & 9 & 11 \\ 4 & 6 & 12 & 14 \\ 5 & 7 & 13 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & . & . & . \\ . & 3 & . & . \\ . & . & 12 & . \\ . & . & . & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} . & . & . & 10 \\ . & . & 9 & . \\ . & 6 & . & . \\ 5 & . & . & . \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} . & 2 & . & . \\ . & . & 9 & . \\ . & . & . & 14 \\ 5 & . & . & . \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} . & . & 8 & . \\ . & . & . & 11 \\ 4 & . & . & . \\ . & 7 & . & . \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} . & . & . & 10 \\ 1 & . & . & . \\ . & 6 & . & . \\ . & . & 13 & . \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} . & 2 & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & . & . & 14 \\ . & . & 13 & . \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} . & . & 8 & . \\ . & 3 & . & . \\ 4 & . & . & . \\ . & . & . & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & . & . & . \\ . & . & . & 11 \\ . & . & 12 & . \\ . & 7 & . & . \end{pmatrix};$$

магичность $\to a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}=a_{14}+a_{23}+a_{32}+a_{41}=a_{12}+a_{23}+a_{34}+a_{41}=a_{13}+a_{24}+a_{31}+a_{42}=$
$=a_{14}+a_{21}+a_{32}+a_{43}=a_{12}+a_{21}+a_{34}+a_{43}=a_{13}+a_{22}+a_{31}+a_{44}=a_{11}+a_{24}+a_{33}+a_{42}.$

Случайно выбранные размещения *дочерних* матриц в числовом пространстве материнской магической матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 10 \\ 1 & 3 & 9 & 11 \\ 4 & 6 & 12 & 14 \\ 5 & 7 & 13 & 15 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 8 & 10 & 32 & 34 \\ 9 & 11 & 33 & 35 \\ 12 & 14 & 36 & 38 \\ 13 & 15 & 37 & 39 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 6 & 12 & 14 & 36 \\ 7 & 13 & 15 & 37 \\ 18 & 24 & 26 & 48 \\ 19 & 25 & 27 & 49 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 51 & 57 & 59 & 145 \\ 54 & 60 & 62 & 148 \\ 55 & 61 & 63 & 149 \\ 98 & 104 & 106 & 192 \end{pmatrix}; \text{ и т.д.}$$

Из приведенных примеров видно, что как бы мы не перемещали, свободно выбирая матрицу порядка m, при условии, что $m < n$, всегда дочерняя матрица порядка m будет магической в поле магического числового пространства матрицы порядка n, то есть материнской магической матрицы. Поэтому двумерное числовое пространство материнской магической матрицы порядка n будем называть магическим двумерным числовым пространством.

Другим очень важным свойством магических матриц является то, что разность между магической матрицей и её транспонированной даёт магическую матрицу, у которой суммы элементов отдельно взятых диагоналей одинаковы и равны нулю, то есть

$$\overset{0}{\mathbf{A}} = \overset{\text{У}}{\mathbf{A}} - \overset{\text{У}}{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}. \tag{1}$$

Например:

$$\overset{0}{\mathbf{A}} = \overset{30}{\mathbf{A}} - \overset{30}{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 10 \\ 1 & 3 & 9 & 11 \\ 4 & 6 & 12 & 14 \\ 5 & 7 & 13 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 12 & 13 \\ 10 & 11 & 14 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Здесь верхний значок над буквой **A** означает сумму элементов одной (любой) диагонали магической матрицы, так как суммы элементов всех отдельно взятых диагоналей одинаковы.

Правило (1) справедливо для всех дочерних магических матриц порядка $m<n$.

Сумма магической матрицы и ее транспонированной дает магическую матрицу, у которой суммы элементов одинаковы и в два раза больше исходной матрицы, то есть

$$\overset{2\text{У}}{\mathbf{A}} = \overset{\text{У}}{\mathbf{A}} + \overset{\text{У}}{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}. \qquad (3)$$

Например:

$$\overset{60}{\mathbf{A}} = \overset{30}{\mathbf{A}} + \overset{30}{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 10 \\ 1 & 3 & 9 & 11 \\ 4 & 6 & 12 & 14 \\ 5 & 7 & 13 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 12 & 13 \\ 10 & 11 & 14 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 12 & 15 \\ 3 & 6 & 15 & 18 \\ 12 & 15 & 24 & 27 \\ 15 & 18 & 27 & 30 \end{pmatrix};$$

при этом, $\overset{2\text{У}}{\mathbf{A}} = \overset{2\text{У}}{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}$. (4)

Так как определители всех магических *дочерних* матриц, кроме дочерних матриц второго порядка, равны нулю $(\det \overset{\text{У}}{\mathbf{A}} = 0)$, то все они – вырождены, что является основным недостатком магических матриц. Поэтому, на первый взгляд, магические матрицы так же бесполезны для линейных преобразований векторов, как и магические квадраты; так как построить матрицу, обратную магической, невозможно, а значит, и восстановить исходный вектор невозможно.

И все же – выход из создавшейся ситуации есть! Рассмотрим подробнее магическую матрицу типа $\overset{0}{\mathbf{A}}$ (2) и введем понятие «псевдовращения» вектора.

Псевдовращение вектора – это условно принятый, поэлементный сдвиг элементов вектора (влево, вправо, вниз, вверх); при этом после каждого сдвига фиксируется вектор-строка с новой последовательностью элементов. Сдвигая таким образом n – 1 раз, формируется матрица. Выполним такую процедуру для каждой вектор-строки матрицы $\overset{0}{\mathbf{A}}$ и исходного вектора.

Первая вектор-строка – (0, 1, 4, 5). Сдвигая влево поэлементно («вращение» против часовой стрелки), формируем матрицу $\mathbf{A}_1$, затем находим ее обратную матрицу $\mathbf{A}_1^{-1}$

Матрица: $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, ее обратная матрица: $\mathbf{A}_1^{-1} = \frac{1}{80} \cdot \begin{pmatrix} -13 & 7 & -3 & 17 \\ 7 & -3 & 17 & -13 \\ -3 & 17 & -13 & 7 \\ 17 & -13 & 7 & -3 \end{pmatrix}$. (5)

Вторая вектор-строка – (– 1, 0, 3, 4). Аналогично, сдвигая влево поэлементно, формируем матрицу $\mathbf{A}_2$, затем находим ее обратную матрицу $\mathbf{A}_2^{-1}$.

Матрица: $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, ее обратная матрица: $\mathbf{A}_2^{-1} = \frac{1}{48} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 5 & -1 & 11 \\ 5 & -1 & 11 & -7 \\ -1 & 11 & -7 & 5 \\ 11 & -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. (6)

Таким же образом формируем матрицу $\mathbf{A}_3$ и находим ее обратную матрицу $\mathbf{A}_3^{-1}$ для третьей вектор-строки, и $\mathbf{A}_4$ и ее обратную матрицу $\mathbf{A}_4^{-1}$ для четвертой вектор-строки.

Далее «вращаем» исходный вектор, то есть сдвигаем поэлементно вниз («вращение» против часовой стрелки) и формируем матрицу **X**.

Например, сдвигая исходный вектор **x**(9, 2, 11, 6) поэлементно вниз, сформируем следующую матрицу:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 11 & 2 \\ 2 & 9 & 6 & 11 \\ 11 & 2 & 9 & 6 \\ 6 & 11 & 2 & 9 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Умножим магическую матрицу $\overset{0}{\mathbf{A}}$ на матрицу **X**.

$$\overset{0}{\mathbf{A}}' = \overset{0}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 6 & 11 & 2 \\ 2 & 9 & 6 & 11 \\ 11 & 2 & 9 & 6 \\ 6 & 11 & 2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 & 72 & 52 & 80 \\ 48 & 44 & 24 & 52 \\ -36 & -40 & -60 & -32 \\ -64 & -68 & -88 & -60 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Полученная матрица $\overset{0}{\mathbf{A}}'$ – также магическая матрица, так как сумма элементов отдельно взятых диагоналей одинакова и равна нулю.

Для восстановления исходного вектора необходимо умножить обратную матрицу $\mathbf{A}_i^{-1}$, сформированную из любой вектор-строки матрицы $\overset{0}{\mathbf{A}}$, на соответствующую вектор-строку $\boldsymbol{a}_i'$ матрицы $\overset{0}{\mathbf{A}}'$, то есть

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_i^{-1} \cdot \boldsymbol{a}_i', \quad (9)$$

где **i** – номер вектор-строки.

Например:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \boldsymbol{a}_1' = \frac{1}{80} \begin{pmatrix} -13 & 7 & -3 & 17 \\ 7 & -3 & 17 & -13 \\ -3 & 17 & -13 & 7 \\ 17 & -13 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 76 \\ 72 \\ 52 \\ 80 \end{pmatrix} = \frac{1}{80} \begin{pmatrix} 720 \\ 160 \\ 880 \\ 480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

При сложении магической матрицы с любым числом или вычитании любого числа из матрицы магичность результирующей матрицы не нарушается.

3 Закон распределения чисел натурального ряда в магической матрице

Если представлять любую строку или столбец материнской магической матрицы в виде дискретной случайной величины ***n***, то функция распределения вероятностей будет равна $F(n) = P\{n = x\}$, и будет иметь вид некоторой ступенчатой функции распределения, а плотность вероятностей будет представлять собой периодическую функцию $f'(n)$. Для большей наглядности на рис. 2 функция распределения изображена в упрощенном виде, то есть по оси ординат отложены не вероятности, а числа случайной величины.

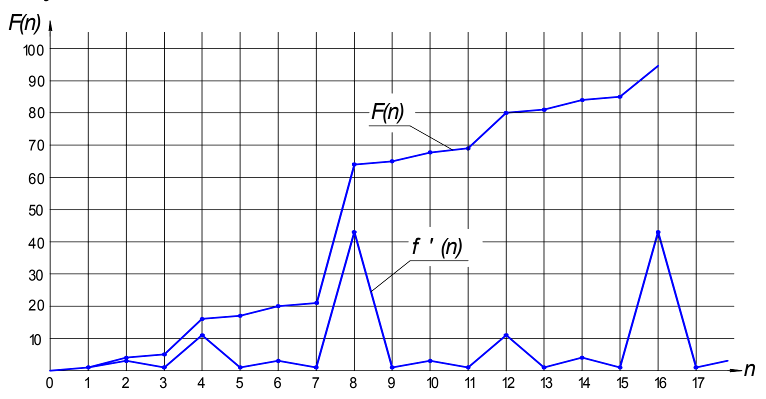


Рисунок 2 – Функция распределения случайной величины (первого столбца магической матрицы) и ее плотность

Зная закон распределения $F(n)$ и плотность вероятностей $f'(n)$, можно по любой случайно выбранной *дочерней* магической матрице восстановить материнскую магическую матрицу. Так как все *дочерние* магические матрицы имеют свои функции распределения и соответственно свои плотности вероятностей, то знание этих законов позволяет значительно сжимать информацию, если она представлена в виде магической матрицы. Знание закона распределения позволяет хранить в памяти не всю магическую матрицу, а только первую вектор-строку и первый вектор-столбец, то есть для магической матрицы четвертого порядка можно хранить в памяти не 16 чисел, а всего 7, что составляет 56,25 % сжатия информации. Процент сжатия информации зависит от порядка матрицы. Из графика на рис. 3 видно, что чем выше порядок матрицы, тем выше процент сжатия информации.

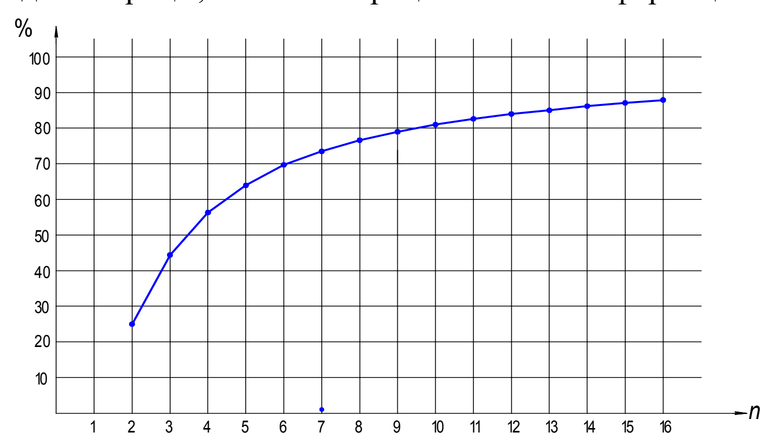


Рисунок 3 – Зависимость процента сжатия магической информации от порядка матрицы

Например:

$$\text{исходная матрица: } \overset{366}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 51 & 57 & 59 & 145 \\ 54 & 60 & 62 & 148 \\ 55 & 61 & 63 & 149 \\ 98 & 104 & 106 & 192 \end{pmatrix}; \text{ сжатая матрица: } \overset{у}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 51 & 57 & 59 & 145 \\ 54 & . & . & . \\ 55 & . & . & . \\ 98 & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Здесь закон распределения известен – это последовательность чисел первой вектор-строки. Вычислим плотность вероятности, то есть первую производную. Производную будем вычислять в конечных разностях по следующей формуле:

$$\Delta a_{n+1} = \frac{a_{n+1} - a_n}{\Delta n},$$

где n = (0, 1, 2, 3) и $\Delta n = 1$.

Тогда $f'(n)$ = (51, 6, 2, 86); заменим первый элемент, то есть число «51» в $f'(n)$ на первый элемент второй вектор-строки, то есть на число «54» и проинтегрируем $f'(n)$ по следующей итерационной формуле:

$$F_{n+1}(n) = (\Delta a_n + \Delta a_{n+1})\Delta n,$$

где n = (0, 1, 2, 3) и $\Delta n = 1$.

Получим вторую вектор-строку, то есть $F_2(n)$ = (54, 60, 62, 148). Проделав такую же процедуру для третьей и четвертой вектор-строк, восстановим магическую матрицу.

Процент сжатия информации магических матриц можно еще увеличивать, если хранить в памяти законы распределения в виде номеров (адресов). Тогда вместо магической матрицы любого порядка можно хранить всего четыре числа:

a_{11} – первый элемент матрицы;

a_{12} – номер закона распределения первой вектор-строки;

a_{21} – номер закона распределения первого вектор-столбца;

a_{22} – порядок матрицы.

При увеличении порядка матрицы процент сжатия в пределе будет стремиться к 100 %.

Таким образом, зная законы распределения чисел в магических матрицах можно преобразовать любое положительное целое число в магическую матрицу.

4 Возможные приложения магических матриц

Известно, что основным назначением матриц является преобразование координат при переходе от одной координатной системы к другой либо переход от одной точки к другой в n-мерном пространстве [2].

Во втором разделе был описан метод, как пользоваться произведением магической матрицы на вектор, который позволяет проводить преобразования координат как в евклидовом пространстве, так и в магическом пространстве.

Удачные сочетания магических матриц и магических векторов позволяют деформировать евклидово пространство и перемещать замкнутое евклидово пространство в магическом пространстве так же, как перемещение точки в евклидовом пространстве. Теория магических векторов и теория магического пространства будут описаны в следующих работах. Теперь, получив произведение магической матрицы на вектор, все операции линейной алгебры справедливы и для магических матриц.

В предыдущем разделе описаны методы сжатия магической информации и определены законы распределения чисел в магических матрицах.

Кроме того, сам метод построения материнской магической матрицы позволяет разложить любой исходный вектор на два составляющих вектора, элементы которых по величине значительно меньше элементов исходного вектора и не превышают число «15», при условии, что элементы исходного вектора находятся в диапазоне 0÷255.

Для этого элементы исходного вектора находят в табл. 1 (цифры жирного шрифта) и записывают a_n в один вектор, а b_n – в другой.

Например: пусть исходный вектор **x**(242, 95, 36, 231), по табл. 1 находим элементы вектора **x** и, выписывая a_n и b_n , получим

x(242, 95, 36, 231) → **x**`(12, 15, 2, 11),
x(242, 95, 36, 231) → **x**``(13, 3, 4, 13).

Заключение

В заключение следует отметить самое главное – это преобразование одномерного числового пространства (натурального ряда чисел) в двухмерное числовое пространство (магическую материнскую матрицу). Уникальная материнская магическая матрица может породить большое многообразие дочерних магических матриц порядка $m < n$, где n – порядок материнской магической матрицы. Каждая дочерняя магическая матрица может быть использована для решения тех или иных задач линейной алгебры, сжатия магической информации и использоваться в приложениях при решении некоторых задач [2].

Литература

1. Постников М.М. Магические квадраты. – М.: Наука, 1964.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – М.: Наука, 1967. – Т. I.
3. Левкович-Маслюк Л.И. Динамические системы и сжатие информации. – М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдышева РАН, 2003.
4. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – Москва; Ленинград, 1963

Л.П. Андрєєв

Магічна матриця – структура двомірного числового простору з унікальними властивостями
У статті розглядається двомірний числовий простір у вигляді магічної матриці з неординарними властивостями. Пояснюється головна відмінність магічної матриці від відомих магічних квадратів і детально описаний метод її побудови. Розглядаються поняття материнської магічної матриці і дочірніх магічних матриць. Детально описаний метод додатку магічних матриць при перетворенні координатної системи і при переході від крапки до крапки в ***n-мірному*** векторному просторі. Стаття розрахована на науковців, що цікавляться проблемами лінійної алгебри і матричного числення.

L.P. Andrejev

Magic Matrix – the Structure of Two-dimensional Numerical Space with Eccentric Properties
In the article the structure of two-dimensional numerical space is examined as a magic matrix with eccentric properties. The main distinction of magic matrix from the known magic squares is explained and the method of its construction is written up. The concepts of maternal magic matrix and daughters' magic matrices are examined. The method of appendix of magic matrices is written up under transformation of the coordinate system and in transition point-to-point in the *n-measured* vectorial space.

Статья поступила в редакцию 31.10.2008.